Topologie Algébrique TD 7

16 Décembre 2011

7 Homologie

Exercice 7.1 Calculer les homologies (à coefficient dans $\mathbf{Z}$) des espaces topologiques suivants :

1. Une partie convexe dans un espace vectoriel réel.
2. $\mathbb{S}^n$, la sphère de dimension n.
3. Un graphe fini connexe.
4. La surface compacte orientable de genre g.
5. La bouteille de Klein.
6. $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, l'espace projectif complexe de dimension n.
7. $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$, l'espace projectif réel de dimension n.
8. $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$, le tore topologique de dimension n.

Exercice 7.2 (Caractéristique d'Euler) Soit X un espace topologique de *dimension homologique finie* (*i.e.* $H_i(X, \mathbf{R}) = 0$ pour i assez grand), et on suppose de plus que pour chaque degré i, son *nombre de Betti* de degré i est fini, c'est-à-dire, $b_i(X) := \dim_{\mathbf{R}} H_i(X, \mathbf{R}) < \infty$. Par exemple, les CW-complexes finis vérifient ces deux propriétés. On définit la *caractéristique d'Euler* de X par la somme alternée (finie) de ses nombres de Betti :

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i$$

.

1. **(Interprétation cellulaire)** Soit X un CW-complexe fini de dimension n, pour $0 \leq i \leq n$, on note a_i le nombre de cellules de dimension i. Montrer que les sommes alternées des a_i et des b_i sont égales :

   $$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i = \chi(X).$$

   En particulier, $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$ ne dépend que du type d'homotopie de l'espace, et ne dépend pas de la structure cellulaire.
2. **(Multiplicativité)** Soient X, Y deux CW-complexes finis, montrer que

   $$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

3. **(Additivité)** Soit X un CW-complexe fini, qui est l'union de deux sous-complexes A et B, montrer que
$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$
4. **(Revêtements)** Soit $p : X \to Y$ un revêtement à d feuilles, où Y est un CW-complexe fini, montrer que
$$\chi(X) = d \cdot \chi(Y).$$
5. **(Quotients)** Soit X un CW-complexe fini, A un sous-complexe fini de X. Montrer que
$$\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) + 1.$$
6. **(Mutiplicativité raffinée)** Soit $p : E \to B$ un fibré en fibre F, c'est-à-dire, localement en B, p est un produit de la base et la fibre F. On suppose que B, F ainsi E admettent des structures de CW-complexe finis. Montrer que
$$\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F).$$
7. Calculer la caractéristique d'Euler des espaces topologiques suivants :
   (a) Surface compacte orientable de genre g ;
   (b) Espace projectif réel de dimension n ;
   (c) Montrer que la caractéristique d'Euler d'un graphe fini planaire est égale à $2 - r$, où r est le nombre de régions qu'il sépare le plan.
   (d) Un tore topologique de dimension n.
   (e) Le groupe orthogonal spécial $\mathbf{SO}(n)$ pour $n \geq 2$.

Exercice 7.3 (Actions libres sur une sphère) Si on se donne un groupe fini agissant librement et proprement discontinument sur une sphère de dimension paire. Montrer que le groupe est trivial ou isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 7.4 (Inégalités de Morse) Soit X un CW-complexe fini de dimension n, pour $0 \leq i \leq n$, on note a_i le nombre de cellule de dimension i, et b_i le *nombre de Betti* de degré i, c'est-à-dire : $b_i := \dim_{\mathbf{R}} H_i(X, \mathbf{R})$.

1. Montrer la première série des inégalités de Morse :
$$a_i \geq b_i$$
pour $0 \leq i \leq n$
2. Montrer la deuxième série des inégalités de Morse :
$$a_0 \geq b_0;$$
$$a_1 - a_0 \geq b_1 - b_0;$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \cdots + (-1)^n a_0 \geq b_n - b_{n-1} + b_{n-2} \cdots + (-1)^n b_0.$$
En fait, la dernière est une égalité qui donne la caractéristique d'Euler.

3. Si on suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $a_i a_{i+1} = 0$, montrer que $a_i = b_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.
4. Considérer les homologies à coefficients dans un corps de caractéristique non nulle, par exemple $\mathbf{F}_p$ avec p un entier premier. Définir les *p-nombres de Betti*, énoncer et démontrer les inégalités de Morse analogues. On remarque que les inégalités ainsi obtenues peuvent être plus fortes que les inégalités usuelles.

Exercice 7.5 (Tore et sphère) On munit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ du point de base 1 et on note $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ le bouquet de 2 copies deux cercles.

1. Montrer que le quotient topologique $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 / (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$. On notera p l'application induite $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 / (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{S}^2$.
2. Montrer que l'application p n'est pas homotope à une application constante.
3. Montrer que toute application continue $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est homotope à une application constante.

Exercice 7.6 (Degrés) Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue.

1. Si f est *paire*, *i.e.* $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, montrer que le degré de f est pair.
2. Si f est *impaire*, *i.e.* $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, montrer que le degré de f est impair.

Exercice 7.7 (Borsuk-Ulam) Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbf{R}^n$ une application continue, montrer qu'il existe un point $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Exercice 7.8 ("Jambon Sandwich") On munit la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, l'espace vectoriel réel de dimension n. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sous-ensembles mesurables de mesures finies dans $\mathbf{R}^n$, montrer qu'il existe une hyperplan qui coupe chaque A_i en deux parties de même mesure. (En dimension 3, pourquoi le titre "Jambon Sandwich" ?)